

Założenia początkowe:

V_0 – objętość pomieszczenia = objętość początkowa starego powietrza

u – wydajność wentylatora

$V_s(t)$ – objętość starego powietrza w chwili t

Oczywiście dla $t = 0$ zachodzi równość:

$$V_s(0) = V_0$$

W czasie $t = t'$ wyrażenie przyjmuje postać:

$$V_s(t') = V_0 - u \cdot t'$$

Dla $t = t''$ (kolejna iteracja) uwzględniamy, że wentylator wyciąga już mieszaninę powietrza starego oraz nowego:

$$V_s(t'') = V_s(t') - u \cdot \frac{V_s(t')}{V_0}$$

Przyrost objętości nowego powietrza, czyli ubytek objętości starego powietrza jest równy:

$$\Delta V_s(t) = V_s(t'') - V_s(t')$$

czyli po podstawieniu:

$$\Delta V_s(t) = V_s(t') - u \cdot \frac{V_s(t')}{V_0} - V_s(t')$$

i uproszczeniu:

$$\Delta V_s(t) = - u \cdot \frac{V_s(t')}{V_0}$$

Jak już wspomniałem trzeba dokonać całkowania. W tym celu przyrost $\Delta V_s(t)$ zmieniamy na przyrost nieskończenie mały, który zapisujemy jako $\frac{dV_s(t)}{dt}$. W wyniku tego równanie przybiera postać:

$$\frac{dV_s(t)}{dt} = -u \cdot \frac{V_s(t)}{V_0}$$

Teraz po pomnożeniu stronami przez dt i podzieleniu przez $V_s(t)$ otrzymujemy:

$$\frac{1}{V_s(t)} \cdot dV_s(t) = \frac{-u}{V_0} \cdot dt$$

Otrzymane wyrażenie całkujemy stronami:

$$\int_0^t \frac{dV_s(t)}{V_s(t)} = \int_0^t \cdot \frac{-u}{V_0} \cdot dt$$

Całki rozwiązujemy:

$$\ln [V_s(t)] = \frac{-u}{V_0} \cdot t$$

i dokonujemy podstawienia:

$$\ln[V_s(t)] - \ln[V_s(0)] = \frac{-u}{V_0} \cdot t - \frac{-u}{V_0} \cdot 0$$

Pamiętając, że:

$$V_s(0) = V_0$$

Całość możemy zapisać jako:

$$\ln[V_s(t)] - \ln(V_0) = \frac{-u}{V_0} \cdot t$$

i przekształcić w kolejnych krokach:

$$\ln[V_s(t)] = \frac{-u}{V_0} \cdot t + \ln(V_0)$$

$$V_s(t) = e^{\frac{-u}{V_0} \cdot t + \ln(V_0)}$$

by otrzymać końcową postać interesującej nas zależności:

$$V_s(t) = V_0 \cdot e^{\frac{-u}{V_0} \cdot t}$$

Można oczywiście dokonać jeszcze jednego przekształcenia by móc obliczyć po jakim czasie stare powietrze będzie miało zadaną objętość w naszym pomieszczeniu. W tym celu równanie należy przekształcić ze względu na t:

$$t = -\frac{V_0}{u} \cdot \ln\left(\frac{V_s(t)}{V_0}\right)$$